

Bài 1. (4 điểm)

a) Tính: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2 - 2\sqrt{6x^2 + 3x}}{x^2 - 2x + 2 - \cos(x - 1)}$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa điều kiện $7a + 4b + 3c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 2018 \sin(\pi x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$.

Bài 2. (3 điểm)

Cho các số thực dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành cấp số cộng và các số thực dương b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 lập thành cấp số nhân. Biết rằng $a_1 = b_1$ và $a_5 = b_5$. Chứng minh rằng:

$$a_2 + a_3 + a_4 \geq b_2 + b_3 + b_4.$$

Bài 3. (3 điểm)

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số. Một số thuộc S được gọi là số “đẹp” nếu nó có các chữ số khác nhau, gồm hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ sao cho tổng các chữ số chẵn bằng tổng các chữ số lẻ. Bạn An chọn ngẫu nhiên một số trong S . Tính xác suất để An chọn được số “đẹp”.

Bài 4. (3 điểm)

Với n là số nguyên dương và $x \neq 0$, xét biểu thức $\left(x^8 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7}\right)^n$. Chứng minh rằng nếu n không chia hết cho 5 thì khai triển của biểu thức trên sẽ không chứa số hạng tự do.

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh S . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) .

Bài 6. (3 điểm)

Trong một giải thi đấu bóng bàn, số lượng vận động viên nam gấp đôi số nữ. Mỗi cặp vận động viên thi đấu với nhau đúng một lần và không có trận hòa, chỉ có thắng – thua. Tỷ số giữa số trận thắng của nữ và số trận thắng của nam là $\frac{7}{5}$. Tính số vận động viên của giải đấu.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm)

a) Tính: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2 - 2\sqrt{6x^2 + 3x}}{x^2 - 2x + 2 - \cos(x-1)}$

Giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2 - 2\sqrt{6x^2 + 3x}}{x^2 - 2x + 2 - \cos(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x+2 - \sqrt{6x+3}) + \sqrt{6x+3} \cdot (x+1 - 2\sqrt{x})}{(x-1)^2 + 2\sin^2 \frac{x-1}{2}} \quad (1đ)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1}{x+2 + \sqrt{6x+3}} + \frac{\sqrt{6x+3}}{x+1 + 2\sqrt{x}}}{1 + \frac{2\sin^2 \frac{x-1}{2}}{(x-1)^2}} = \frac{\frac{2}{6} + \frac{3}{4}}{1 + \frac{2}{4}} = \frac{13}{18} \quad (1đ)$$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa điều kiện $7a + 4b + 3c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 2018 \sin(\pi x)$ (*) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$.

Giải.

Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c - 2018 \sin(\pi x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. (0,5đ)

Ta có $2f(1) + 3f(2) + f(0) = 2(a + b + c) + 3(4a + 2b + c) + c = 14a + 8b + 6c = 0$ (1đ)

Suy ra, hoặc $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ hoặc 2 trong 3 giá trị $f(0), f(1), f(2)$ trái dấu với nhau

$\Rightarrow$ (*) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$. (0,5đ)

Bài 2. (3 điểm)

Cho các số thực dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành cấp số cộng và các số thực dương b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 lập thành cấp số nhân. Biết rằng $a_1 = b_1$ và $a_5 = b_5$. Chứng minh rằng:

$$a_2 + a_3 + a_4 \geq b_2 + b_3 + b_4.$$

Giải.

Đặt $a_1 = b_1 = x > 0, a_5 = b_5 = y > 0$. Gọi d, q lần lượt là công sai, công bội của CSC, CSN đã cho. Ta có công thức

$$a_5 = a_1 + 4d \text{ và } a_2 = a_1 + d \text{ nên } a_2 = \frac{a_5 + 3a_1}{4} = \frac{3x + y}{4}. \quad (0,5đ)$$

$$\text{Tương tự ta tính được } a_3 = \frac{x + y}{2} \text{ và } a_4 = \frac{x + 3y}{4}. \quad (0,5đ)$$

$$\text{Lập luận tương tự với cấp số nhân, ta cũng có } b_2 = \sqrt[4]{x^3 y}, b_3 = \sqrt{xy}, b_4 = \sqrt[4]{xy^3}. \quad (0,5đ)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si hai số thì

$$a_3 = \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} = b_3, \quad (0,5đ)$$

$$a_2 = \frac{3x + y}{4} = \frac{x}{2} + \frac{x + y}{4} \geq \frac{x + \sqrt{xy}}{2} \geq \sqrt[4]{x^3 y} = b_2, \quad (0,5đ)$$

$$a_4 = \frac{x+3y}{4} = \frac{y}{2} + \frac{x+y}{4} \geq \frac{y+\sqrt{xy}}{2} \geq \sqrt[4]{xy^3} = b_4. \quad (0,5đ)$$

Vậy ta có $a_2 + a_3 + a_4 \geq b_2 + b_3 + b_4$.

Bài 3. (3 điểm)

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số. Một số thuộc S được gọi là số “đẹp” nếu nó có các chữ số khác nhau, gồm hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ sao cho tổng các chữ số chẵn bằng tổng các chữ số lẻ. Bạn An chọn ngẫu nhiên một số trong S . Tính xác suất để An chọn được số “đẹp”.

Giải.

Số phần tử của S : $9 \cdot 10^3 = 9000$ (0,25đ)

Có 14 bộ chữ số thỏa yêu cầu: (0, 4, 1, 3), (0, 6, 1, 5), (0, 8, 1, 7), (0, 8, 3, 5), (2, 4, 1, 5), (2, 6, 1, 7),

(2, 6, 3, 5), (2, 8, 1, 9), (2, 8, 3, 7), (4, 6, 1, 9), (4, 6, 3, 7), (4, 8, 5, 7), (4, 8, 3, 9), (6, 8, 5, 9) (1đ)

Trong 4 bộ đầu, mỗi bộ cho $4! - 3! = 18$ số “đẹp”. (0,5đ)

Trong 10 bộ sau, mỗi bộ cho $4! = 24$ số “đẹp”. (0,5đ)

Số lượng số “đẹp” trong S : $4 \cdot 18 + 10 \cdot 24 = 312$ (0,25đ)

Xác suất để chọn được số đẹp: $\frac{312}{9000} = \frac{13}{375} \approx 3,46\%$ (0,5đ)

Bài 4. (3 điểm)

Với n là số nguyên dương và $x \neq 0$, xét biểu thức $\left(x^8 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7}\right)^n$. Chứng minh rằng nếu n không chia hết cho 5 thì khai triển của biểu thức trên sẽ không chứa số hạng tự do.

Giải.

Ta viết biểu thức đã cho lại thành

$$\left(x^8 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7}\right)^n = 1 + x^5 \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^7}\right)^n. \quad (0,5đ)$$

$$\text{Chú ý rằng } 1 + x^5 \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k x^{5k} \text{ và } \left(x^3 + \frac{1}{x^7}\right)^n = \sum_{h=0}^n C_n^h x^{3(n-h)-7h} = \sum_{h=0}^n C_n^h x^{3n-10h}. \quad (1đ)$$

Do đó, số hạng tổng quát của khai triển trên là

$$T = C_n^k x^{5k} C_n^h x^{3n-10h} = C_n^k C_n^h x^{3n+5k-10h}. \quad (0,5đ)$$

Số hạng này là số hạng tự do khi

$$3n + 5k - 10h = 0 \Leftrightarrow 3n = 5(2h - k) \text{ và } 0 \leq h, k \leq n \quad (*) \quad (0,5đ)$$

Vì n không chia hết cho 5 thì rõ ràng không tồn tại h, k nguyên thỏa mãn (*),

tức là khai triển không chứa số hạng tự do. Ta có đpcm. (0,5đ)

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh S . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) .

Giải.

Gọi M, N, P là trung điểm BC, AB, CA . Ta có $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC .

Ngoài ra, $\triangle ABC$ vuông tại A nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, tức là $SM \perp (ABC)$. Do đó, $(SBC) \perp (ABC)$. (0,25đ)

Ta có $SN \perp AB$ và $MN \perp AB$ nên góc tạo bởi $(SAB), (ABC)$ là $\angle SNM = 60^\circ$.

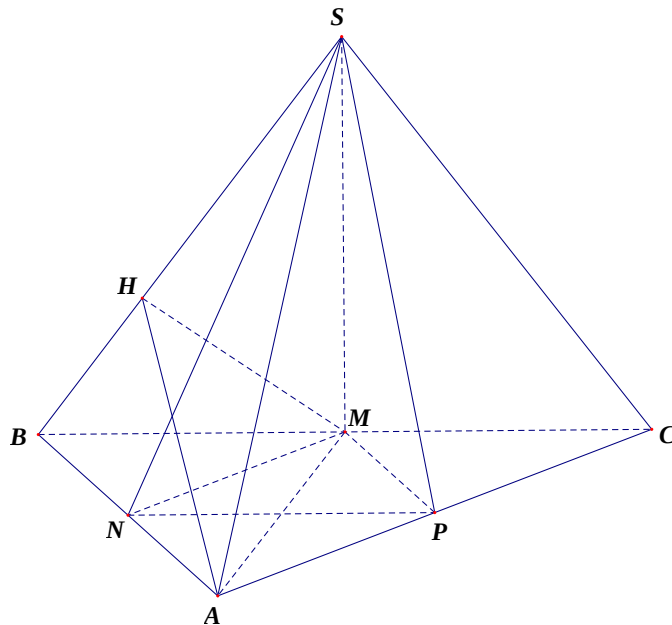
Tương tự, góc tạo bởi $(SAC), (ABC)$ là $\angle SPM = 60^\circ$. (0,25đ)

Hai tam giác vuông SMN, SMP có SM là cạnh chung và $\angle SNM = \angle SPM$ nên $\triangle SMN = \triangle SMP \Rightarrow MN = MP$. (0,25đ)

Từ đây suy ra $AB = AC$ hay tam giác ABC vuông cân tại A , suy ra $AM \perp BC$.

Do đó, $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB$. (0,25đ)

Gọi H là hình chiếu của M lên SB , tức là $MH \perp SB$ mà $AM \perp SB$ nên $SB \perp (AMH)$, suy ra góc tạo bởi 2 mặt phẳng $(SAB), (SBC)$ là $\angle MHA$. (0,5đ)



Ta có: $AB = AC = a \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}, MN = \frac{a}{2}$ và $\angle SNM = 60^\circ$ nên $SN = a$. (0,5đ)

Suy ra $SB = \sqrt{NS^2 + NB^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. (0,5đ)

Do đó $S_{SAB} = \frac{1}{2} SN \cdot AB = \frac{1}{2} AH \cdot SB \Rightarrow AH = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. (0,5đ)

Ngoài ra, $AM \perp SM$ nên tam giác AHM vuông tại M nên theo định lý Pythagore thì

$HM = \sqrt{AH^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{5} - \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{10}}$. (0,5đ)

Do đó, $\cos AHM = \frac{HM}{AH} = a\sqrt{\frac{3}{10}} : \frac{2a\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. (0,5đ)

Vậy cosin của góc tạo bởi 2 mặt phẳng $(SAB), (SBC)$ là $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Bài 6. (3 điểm)

Trong một giải thi đấu bóng bàn, số lượng vận động viên nam gấp đôi số nữ. Mỗi cặp vận động viên thi đấu với nhau đúng một lần và không có trận hòa, chỉ có thắng – thua. Tỉ số giữa số trận thắng của nữ và số trận thắng của nam là $\frac{7}{5}$. Tính số vận động viên của giải đấu.

Giải.

Gọi số nam là $2n$, số nữ là n và tổng số vận động viên là $3n$.

Tổng số trận đấu là $\frac{3n(3n-1)}{2}$. (0,5đ)

Theo giả thiết thì số trận thắng bởi nam chiếm $\frac{5}{12}$ trong số đó

nên số trận thắng của nam là $\frac{5}{12} \cdot \frac{3n(3n-1)}{2} = \frac{5n(3n-1)}{8}$. (0,5đ)

Số trận đấu giữa các nam là $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$. (0,5đ)

Rõ ràng số trận này không vượt quá số trận thắng của các nam nên suy ra

$\frac{5n(3n-1)}{8} \geq n(2n-1) \Leftrightarrow n \leq 3$. (0,5đ)

Mặt khác, $5n(3n-1)$ phải chia hết cho 8 nên $n = 3$. (0,5đ)

Do đó, số vận động viên của giải là 9, bao gồm 6 nam và 3 nữ. (0,5đ)